深さ1の素イデアルによって判定可能な性質 (代数幾何学への可換環論の応用)

吉田, 憲一

数理解析研究所講究録
400巻 1980年 70-80

深さ1の素イデアルによって判定可能な性質

阪大 理学部 吉田憲一

Aをネーター的可換環で単位元を持つものとする。ここで我々は有限生成 A-加群Mについての性質の中で、特に $\Delta(M)=\{\mathfrak{p}\in \mathrm{Spec}\,A : \mathrm{ht}\,\mathfrak{p}>1,\ \mathrm{depth}\,M_{\mathfrak{p}}=1\}$によって判定可能な$M$に関する性質のいくつかを取り扱ってみたい。

そのためにまず$\Delta(M)$の特徴づけを行なう。そこでまず有限生成A-加群Nに対して$\mathrm{Ass}_A(N)$を考える。

$\mathrm{Ass}(N)\subseteq \mathrm{Ht}_i(A)$のとき$N$を uniform module with ht_iと呼ぼう，特に$\mathrm{Ass}(N)=\{\mathfrak{p}\}$の時，$N$は$\mathfrak{p}$に属する coprimary module と呼ばれる。

有限生成 A-module Nに対して$N_i=\{n\in N : \mathrm{ht}\,\mathrm{ann}_A(n)\geqq i\}$と定めれば，$N_i$は$N$の submodule で，ある整数$d\geqq 0$が存在して次の減少列ができる。

$N = N \supseteq N_1 \supseteq \cdots \supseteq N_d \supsetneq N_{d+1}=(0)$.

この$\{N_i\}$に関して次の命題を得る。

命題：(i) $D_i(N)=\{\mathfrak{P}\in H_i(A):\mathfrak{P}\geqq \mathrm{ann}\,N_i\}$とおけば$D_i(N)=\{\mathfrak{P}\in \mathrm{Ass}(N):\mathrm{ht}\,\mathfrak{P}=i\}$，従って$\mathrm{Ass}(N)=\bigcup_{i=0}^{d}D_i(N)$を得る。

(ii) N_i/N_{i+1}はuniform module with ht i。

(iii) $f\in A$をN-regular elementとすれば，$fN\cap N_i=fN_i$，従って$N/fN\supseteqq N_i/fN_1\supseteqq\cdots\supseteqq N_d/fN_d$を得る。

証明：(i) $\mathfrak{P}\geqq \mathrm{ann}\,N_i$とすれば，$N_i$の定義及び$N_i$が有限生成であるから，$\mathrm{ht}\,\mathfrak{P}\geqq i$であることが安易にわかる。従って$\mathrm{ht}\,\mathfrak{P}=i$で$\mathfrak{P}\geqq \mathrm{Ann}\,N_i$とすれば$\mathfrak{P}$は$\mathrm{ann}\,N_i$のminimal prime divisorであるから$\mathfrak{P}\in \mathrm{Ass}(N_i)\subseteqq \mathrm{Ass}(N)$。逆に$\mathfrak{P}\in \mathrm{Ass}\,N$で$\mathrm{ht}\,\mathfrak{P}=i$とする。このとき$m\in N$で$\mathrm{Ann}(m)=\mathfrak{P}$となるものが存在するから$N_i$の定義より$m\in N_i$ $\therefore \mathrm{Ann}\,N_i\subseteqq \mathrm{Ann}(m)=\mathfrak{P}$，従って$\mathfrak{P}\in D_i(N)$である。

(ii) 次に$\mathrm{Ass}(N_i/N_{i+1})=D_i(N)$を示す。$\mathfrak{P}\in D_i(N)$とすれば，$m\in N_i$があって$\mathrm{Ann}(m)=\mathfrak{P}$，$\bar{m}$を$m$のresidue classとすれば$\mathrm{Ann}(\bar{m})\supseteqq \mathfrak{P}$。今$\mathrm{Ann}(\bar{m})\supsetneqq \mathfrak{P}$とすれば，$x\in \mathrm{Ann}(\bar{m})$，$x\notin \mathfrak{P}$が存在する。このとき$xm\in N_{i+1}$，従って$\mathfrak{P}\neq \mathrm{Ann}(xm)$であるが一方$\mathrm{Ann}(xm)=\mathrm{Ann}(m):xA$で$x\notin \mathfrak{P}$ ゆえに$\mathfrak{P}\supseteqq \mathrm{Ann}(m):xA=\mathrm{Ann}(xm)$，これは矛盾。従って$D_i(N)\subseteqq \mathrm{Ass}(N_i/N_{i+1})$。$\mathfrak{P}\in \mathrm{Ass}(N_i/N_{i+1})$とする。$\bar{m}\in N_i/N_{i+1}$があって$\mathfrak{P}=\mathrm{Ann}(\bar{m})$。$m$を$\bar{m}$の代表元とすれば，$m\in N_i$。$\mathfrak{P}=\mathrm{Ann}(\bar{m})\supseteqq \mathrm{Ann}(m)$で$m\in N_i$

だから $ht\,\mathfrak{P} \geqq i$。今 $ht\,\mathrm{ann}(m) > i$ とすれば $m \in N_{i+1}$ だから $\bar{m} = \bar{0}$ となり矛盾する。そこで $ht\,\mathrm{ann}(m) = i$ である。$\mathfrak{P} \ni x$ に対して $xm \in N_{i+1}$ ゆえに $ht\,\mathfrak{P} = i$, 従って $\mathfrak{P} \in D_i(N)$ ∴ $\mathrm{Ass}(N_i/N_{i+1}) \subseteqq Ht_i(A)$ ∴ N_i/N_{i+1} は uniform module with $ht\,i$.

(iii) $f \in A$ を N - regular element とすれば、$f \notin \mathfrak{P}$, $\mathfrak{P} \in \mathrm{Ass}(N)$、今 $m \in N$ で $fm \in N_i$ とする。$f \notin \mathfrak{P}$, $\mathfrak{P} \in \mathrm{Ass}(N)$ ゆえに $\mathrm{ann}(fm) = \mathrm{ann}(m)$. $fm \in N_i$ ゆえに $\mathrm{ann}(fm) = \mathrm{ann}(m)$ の prime divisor はすべて $ht \geqq i$ ゆえに $m \in N_i$。

A を integral domain かつ A の integral closure $\bar{A}$ は有限 A - module で $ht\,P \cap A = 1$, for $P \in Ht_1(\bar{A})$ を満たすものとする。M を torsion free finite A - module とすれば、ある $\bar{A}$ - free module F で $M \subseteqq F \subseteqq M \otimes_A Q(A)$ となるものが存在する。$\varphi : F \longrightarrow N = F/M$ として $\varphi^{-1}(N_i) = M_i$ とおけば

$$M_2 \supseteqq M_3 \supseteqq \cdots \supseteqq M_d \supsetneqq M_{d+1} = M$$

なる F の sub-modules の減少列が与えられる。

命題：(i) この chain は F のとり方に依らない。

(ii) $\mathrm{Ass}(M_2/M) = \Delta(M)$

(iii) $\mathfrak{p} \in D_i(M_2/M)$ で $\mathfrak{q}$ を $\mathfrak{p}$ に属する primary ideal とすれば，$\mathrm{Ext}_{A_\mathfrak{p}}^i(A_\mathfrak{p}/\mathfrak{q}A_\mathfrak{p}, M_\mathfrak{p}) = \mathrm{Hom}_{A_\mathfrak{p}}(A_\mathfrak{p}/\mathfrak{q}A_\mathfrak{p}, M_i/M_{i+1}) = \{\bar{m} \in M_i/M_{i+1} \mid \mathrm{Ann}(\bar{m}) \supseteq \mathfrak{q}\} \otimes_A A_\mathfrak{p}$

系：$\Delta(M)$ は有限集合である。

証明 (i) F_1, F_2 を条件を満たす $\bar{A}$-free module とすれば，F_1, F_2 を含むものが存在するから，我々は $M \subset L \subset F$，L, F は free $\bar{A}$-module，で F/M から得られるものを M_2，L/M から得られるものを N_2 とすれば $M_2 = N_2$ であることを示せばよい。$L/M \subseteq F/M$ で $ht\ \mathrm{Ann}(N_2/M) > 1$ ゆえ $N_2 \subseteq M_2$ は明らか。逆を示す。そのためには，$M_2 \subseteq L$ を示せばよい。今 $M_2 \not\subseteq L$ とする。$N = M_2 + L$ とおく。このとき $L \subsetneqq N \subseteq F$ であるから $\mathrm{Ann}(N/L) \supseteq \mathrm{Ann}(M_2/M)$. 従って $ht\ \mathrm{Ann}(M_2/M) > 1$ だから $ht\ \mathrm{Ann}(N/L) > 1$. $\mathfrak{p}$ を $\mathrm{Ann}(N/L)$ の minimal prime divisor とする。このとき $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(N/L)$ だから $\mathrm{Hom}_{A_\mathfrak{p}}(A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}, (N/L)_\mathfrak{p}) \neq (0)$. $ht\ \mathfrak{p} > 1$ 故 depth $\bar{A}_\mathfrak{p} > 1$，従って depth $L_\mathfrak{p} > 1$ から我々は，$0 \longrightarrow L \longrightarrow N \longrightarrow N/L \longrightarrow 0$ (exact) から

$$\underset{(0)}{\underset{\parallel}{\mathrm{Ext}_{A_\mathfrak{p}}^0(A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}, L)}} \to \underset{(0)}{\underset{\nparallel}{\mathrm{Ext}_{A_\mathfrak{p}}^0(A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}, N_\mathfrak{p}/L_\mathfrak{p})}} \to \underset{(0)}{\underset{\parallel}{\mathrm{Ext}_{A_\mathfrak{p}}^1(A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}, L)}}$$

これは矛盾。だから $\mathrm{Ann}(N/L)=A$, よって $M_2 \subseteq L$ を得る。

補題：$\mathrm{ht}\, P\cap A=1$, $P\in Ht_1(\bar{A})$ の仮定のもとでは $\mathrm{ht}\,\mathfrak{p}>1$ であれば $\mathrm{depth}\,\bar{A}_{\mathfrak{p}}>1$。

証明 (i) $\phi : A \longrightarrow B$ を noetherian rings の homomorphism, M を B-module とすれば $\mathrm{Ass}(M)={}^a\phi(\mathrm{Ass}_B(M))$. 今 $\mathrm{depth}\,\bar{A}_{\mathfrak{p}}=1$ とすれば $0\neq a\in\mathfrak{p}$ で, $\mathfrak{p}\in \mathrm{Ass}_A(\bar{A}/a\bar{A})$。一方 $\mathrm{Ass}_{\bar{A}}(\bar{A}/a\bar{A})=\{P\in Ht_1(\bar{A}),\ P\ni a\}$, 従って $\mathrm{Ass}_A(\bar{A}/a\bar{A})={}^a\phi(\mathrm{Ass}_{\bar{A}}(\bar{A}/a\bar{A}))$ 故 $P\in Ht_1(\bar{A})$ で $\mathfrak{p}=P\cap A$ である。仮定から $\mathrm{ht}\,\mathfrak{p}=1$。

(ii) $\mathfrak{p}\in \mathrm{Ass}(M_2/M)$ とすれば M_2 の定義から $\mathrm{ht}\,\mathfrak{p}>1$, 従って $\mathrm{ht}\,F_{\mathfrak{p}}>1$, 又 $\mathfrak{p}\in \mathrm{Ass}(F/M)$ 故 $\mathrm{Hom}_{A_{\mathfrak{p}}}(A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}},\ F_{\mathfrak{p}}/M_{\mathfrak{p}})\neq(0)$. よって, $0\longrightarrow M_{\mathfrak{p}}\longrightarrow F_{\mathfrak{p}}\longrightarrow F_{\mathfrak{p}}/N_{\mathfrak{p}}\longrightarrow 0$ (exact) から我々は $\mathrm{Ext}^0_{A_{\mathfrak{p}}}(A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}},\ F_{\mathfrak{p}}/M_{\mathfrak{p}})\cong \mathrm{Ext}^1_{A_{\mathfrak{p}}}(A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}},\ M_{\mathfrak{p}})\neq 0$ を得る。従って $\mathrm{depth}\,M_{\mathfrak{p}}=1$ だから $\mathfrak{p}\in\Delta(M)$. 逆に $\mathfrak{p}\in\Delta(M)$ とすれば $\mathrm{ht}\,\mathfrak{p}>1$ で今示したことから, $\mathrm{Hom}_{A_{\mathfrak{p}}}(A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}},\ F_{\mathfrak{p}}/M_{\mathfrak{p}})\neq(0)$ 従って $\mathfrak{p}\in \mathrm{Ass}(M_2/M)$。特に我々は $\mathrm{ht}\,P\cap A=1$, $P\in Ht_1(\bar{A})$, の仮定がなくとも次の結果を得る。

命題：$\{\mathfrak{p}\in \mathrm{Spec}\,A : \mathrm{depth}\,A_{\mathfrak{p}}=1\}=Ht_1(A)\cup \mathrm{Ass}(\bar{A}/A)$.

(1) seminormality は depth one の イデアルで判定される。seminormalization 及び seminormal については先の数理解析研講究録「可換環の研究」(No. 374)に詳しく述べたので、ここではその結果のみを記す。

定理：A を S_1－条件を満たすネーター環，R を A と $Q(A)$ の中間環で有限 A－module なるものとする。$\phi : A \longrightarrow R/A = N$ に対して $\phi^{-1}(N_i) = A_i(R)$ とおくと，$A_i(R)$ は R の部分環である。このとき A が R の中で seminormal である必要充分条件は conductor $\mathfrak{c}(A_i(R)/A)$ が $A_i(R)$ の radical ideal である。

A が R の中で seminormal であれば，A は R の glueings で与えられるが，それは $\mathrm{Ass}(R/A)$ によって次の様にして与えられる。

定理：A は R の中で seminormal で，$\mathrm{Ass}(R/A) = \{\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n\}$ とする。$\mathfrak{p}_i$ 上の R の prime ideals を $P_{i1} \cdots, P_{ie_i}$, $e_i \geq 1$，とし元 $f \in R$ の P_{ij} による residue class を $f(P_{ij})$ と書けば：

$$A = \{f \in R : f(P_{i1}) = \cdots = f(P_{ie_i}) \in \underset{i=1,\dots,n}{k(\mathfrak{p}_i)}\},$$ ここで

$k(\mathfrak{p}_i) = Q(A/\mathfrak{p}_i)$ である。

環の glueing の例を述べてみよう。

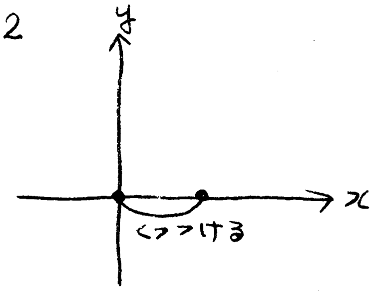
例1. 2つの平面上の2点をくっつけて1点にする。

$R = k[x, y]e_1 + k[x, y]e_2$, $e_i e_j = \delta_{ij} e_i$,

$A = \{\varphi_1(x, y)e_1 + \varphi_2(x, y)e_2 \in R : \varphi_1(0.0) = \varphi_2(0.0)\}$

$= k[X. Y. Z. V]/(XZ, XV, YZ, YV)$

例2



$R = k[x, y]$

$A = \{\varphi(x.y) \in R ; \varphi(0.0) = \varphi(1.0)\}$

$= k[x(x-1), x^2(x-1), y]$

例3　1つの直線と1点をくっつける。t は変数。

$A = \{\varphi(x, y) \in k[x, y] : \varphi(t, 0) = \varphi(0.1)\}$

$= k + (xy, (x-1)y)k[x, y]$。

A はネーター的でない，従って有限生成でないが，$\bar{A} = k[x, y]$ である。

(2)　overring R が A 上 flat かどうかは depth one の prime ideals で判定できる。

定理：Aをネーター整域，RをAと$Q(A)$との中間環とする。このときRがA上flatである必要充分条件は，$A_{\mathfrak{p}} \supseteq R$，または$\mathfrak{p}R=R$がすべてのdepth $A_{\mathfrak{p}}=1$をみたす$\mathfrak{p}\in \mathrm{Spec}A$に対して成り立つ事である。

証明：$F_A(R)=\{\mathfrak{p}\in \mathrm{Spec}\,A : A_{\mathfrak{p}} \not\supseteq R\}$のminimal elementはdepth 1のprime idealである事をまず示そう。$\mathfrak{p}$を$F_A(R)$のminimal elementとしてdepth $A_{\mathfrak{p}}>1$とすれば，$A_{\mathfrak{p}}=\bigcap_{\mathfrak{q}\subsetneq\mathfrak{p}} A_{\mathfrak{q}}$で$\mathfrak{q}\notin F_A(R)$ゆえに$A_{\mathfrak{q}}\supseteq R$から$A_{\mathfrak{p}}\supseteq R$となり矛盾する。

RがA上flatである必要充分条件は$\mathfrak{p}\in \mathrm{Spec}A$に対して，$A_{\mathfrak{p}}\supseteq R$または$\mathfrak{p}R=R$であるから$F_A(R)$のminimal element $\mathfrak{p}$はdepth 1で，仮定から$\mathfrak{p}R=R$ゆえに我々の証明は終わる。

(3) flat overring RがA上で有限生成であることはdepth 1によって決まる。

命題，RがA上環として有限生成ならば$F_A^*(R)=\{\mathfrak{p}\in \mathrm{Spec}A$: depth $A_{\mathfrak{p}}=1$, $A_{\mathfrak{p}} \not\supseteq R\}$は有限集合。逆にRがA上flatのとき$F_A^*(R)$が有限集合であればRはA上有限生成である。

証明：$R = A[\alpha_1, \cdots \alpha_n]$, $\alpha_i \in R$ とする。$\alpha_1, \cdots \alpha_n$ の共通分母の1つを x とすれば，$F_A^*(R) \subseteqq \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A : \mathfrak{p}$ は xA の prime divisor$\}$ から $F_A^*(R)$ は有限集合である。

R は A 上 flat とし，$F_A^*(R) = \{\mathfrak{p}_1, \cdots \mathfrak{p}_t\}$ とする。$\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_t$ とおくと，$\mathfrak{a}R = R$，従って $\alpha_1, \cdots \alpha_n \in R$，$a_1, \cdots a_n \in \mathfrak{a}$ で $\sum a_i \alpha_i = 1$．$C = A[\alpha_1, \cdots, \alpha_n] \subseteqq R$ とおく。

C は A 上 flat で $F_A^*(R) = F_A^*(C)$ は簡単にわかる。一方 A 上 flat ゆえに $R = \bigcap_{\mathfrak{q} \notin F_A^*(R)} A_\mathfrak{q}$, depth $A_\mathfrak{q} = 1$，から $R = C$ となる。

(4) R を A の拡大整域とする。R の中で A が root closed とは，$t \in R$ で今ある整数 $n > 0$ があって $t^n \in A$ であれば $t \in A$。R を A と $Q(A)$ の中間環とすれば，A が R の中で root closed である必要充分条件は、A が A の R の中での integral closure の中で root closed。そこで R は A 上 integral とすれば，A が root closed であれば A は R の中で seminormal であるが特に次の判定法を得る。

命題　R は A 上 integral で birational とする。このとき A は R の中で root closed である必要充分条件は $\operatorname{Ass}(R/A) \ni \mathfrak{p}$, $\operatorname{ht} \mathfrak{p} = i$，に対して conductor $\mathfrak{c}(A_i(R)/A)$ は $A_i(R)$ の radical ideal で $\mathfrak{p}$ 上の $A_i(R)$ の prime ideals はただ1つ。

それを$\mathfrak{P}$とすれば, $k(\mathfrak{p})$は$k(P)$の中でroot closed.

証明：$Ass(R/A)=\{\mathfrak{p}_{ij},\ ht\,\mathfrak{p}_{ij}=i,\ 1\leqq j\leqq e_i\}$として, $\mathfrak{p}_{ij}$上の$A_i(R)$のprime idealをP_{ij}とする。$R\ni t$, $t^n\in A$として, $t\in A_i(R)$をiに関するinductionで示す。$t\in A_{i-1}(R)$とする。$t(P_{ij})^n\in k(\mathfrak{p}_{ij})$で$k(\mathfrak{p}_{ij})$が$k(P_{ij})$の中でroot closed故$t(P_{ij})\in k(\mathfrak{p}_{ij})$, 従って$t\in A_i(R)$, よって$i=d$のとき$t\in A$を得る。

AはRの中でroot closedとすればAはRの中でsemi-normal ゆえに$\mathfrak{c}(A_i(R)/A)$は$A_i(R)$のradical ideal. $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}_{ij}$上の$A_i(R)$のprime idealsを$P_1,\cdots P_u$, $u\geqq 2$とする。

AはRの中でroot closed故Aは$A_i(R)$の中でroot closed, 従って$A_\mathfrak{p}$は$R_\mathfrak{p}$の中でroot closedである。

このとき$A_\mathfrak{p}=\{\alpha\in R_\mathfrak{p}:\alpha(P_1)=\cdots=\alpha(P_u)\in k(\mathfrak{p})\}$であるが, $R_\mathfrak{p}\otimes_{A_\mathfrak{p}}k(\mathfrak{p})=k(P_1)\times\cdots\times k(P_u)$ゆえにある元$\alpha\in R_\mathfrak{p}$で$\alpha(P_1)=-1$, $\alpha(P_2)=\cdots=\alpha(P_u)=1$なるものがある。従って$\alpha^2\in A_\mathfrak{p}$で$\alpha\notin A_\mathfrak{p}$, これは$A_\mathfrak{p}$がroot closedであることに反する。従って$\mathfrak{p}_{ij}$上の$A_i(R)$のprime idealsはただ1つ,

それをP_{ij}とすれば，$k(\mathfrak{p}_{ij})$が$k(P_{ij})$の中でroot closedであることは今示したことで明らかとなる。